Bab 4

Transformasi Geometri

TUJUAN PEMBELAJARAN

- Pembaca bisa memahami konsep transformasi geometri 2-D dan 3-D : translasi, rotasi, Refleksi, Shear dan scalling.

OUTCOME PEMBELAJARAN

- Pembaca bisa menghitung transformasi geometri 2-D secara manual

Pendahuluan

Transformasi geometri pada dasarnya adalah mengubah kedudukan setiap titik, misalkan sebuah titik A(*x,y*) mengalami transformasi sehingga menjadi A'(*x',y'*) menggunakan persamaan atau algoritma tertentu. Hal ini berarti terdapat suatu fungsi T yang memetakan koordinat A menjadi koordinat A' dan dituliskan sebagai :

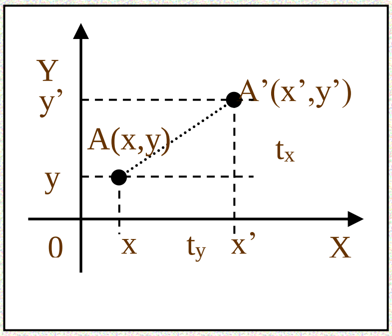
$$A'=T(A).$$

Transformasi yang banyak digunakan di dalam grafika komputer adalah transformasi affin (*affine tranformation*), yang mempunyai bentuk yang sangat sederhana. Sejumlah transformasi dasar dari transformasi affin antara lain adalah : penggeseran (*translation*), penskalaan (*scaling*), pemutaran (*rotation*) dan *shearing*.

4.1 Translasi (Pergeseran)

Sembarang titik pada bidang xy dapat digeser ke sembarang tempat dengan menambahkan besaran pada absis X dan ordinat Y. Misalkan titik A(x,y) digeser searah sumbu X sejauh t_x dan sejauh t_y searah sumbu Y (perhatikan Gambar 4-1), maka titik hasil pergeseran tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$



Gambar 4-1

atau dapat disusun sebagai berikut :

$$x' = x + 0.y + t_x$$
$$y' = 0.x + y + t_y$$

atau dapat disusun dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$$

Contoh 4.1

Tentukan posisi dari segitiga ABC yang dibentuk oleh titik-titik A(20,20), B(100,20) dan C(60,120) jika dilakukan penggeseran pada $\begin{bmatrix}80\\70\end{bmatrix}$.

Jawab:

$$\begin{bmatrix} x'_a & x'_b & x'_c \\ y'_a & y'_b & y'_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 20 & 100 & 60 \\ 20 & 20 & 120 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 80 & 80 & 80 \\ 70 & 70 & 70 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 180 & 140 \\ 90 & 90 & 190 \end{bmatrix}$$

Yaitu A'(100,90), B'(180,90) dan C'(140,190)

Contoh cara perhitungan matriks:

A x B =

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3.5) + (-2.-1) & (3.1) + (-2.2) \\ (4.5) + (5.-1) & (4.1) + (5.2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+2 & 3-4 \\ 20-5 & 4+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -1 \\ 15 & 14 \end{pmatrix}$$

A^3 = A x A x A =

$$= \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 20 & -9 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1.3) + (-8.5) & (-1.-2) + (-8.1) \\ (20.3) + (-9.5) & (20.-2) + (-9.1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3-40 & 2-8 \\ 60-45 & -40-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 & -6 \\ 15 & -49 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A \times B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1.6)+(-2.5)+(3.2) & (1.3)+(-2.1)+(3.7) \\ (4.6)+(1.5)+(5.2) & (4.3)+(1.1)+(5.7) \end{pmatrix}$$

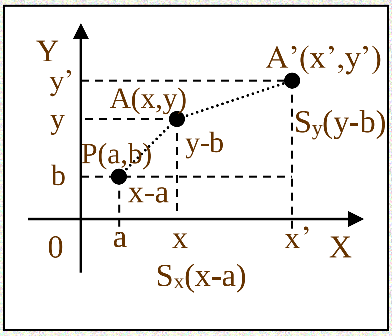
$$= \begin{pmatrix} 6-10+6 & 3-2+21 \\ 24+5+10 & 12+1+35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 22 \\ 39 & 48 \end{pmatrix}$$

4.2 Scalling (Penskalaan)

Penskalaan adalah proses untuk memperbesar atau memperkecil suatu obyek atau gambar. Misalkan titik **A**(x,y) diskalakan terhadap titik **P**(a,b) dengan faktor skala sebesar $\mathbf{S_x}$ searah sumbu X dan sebesar $\mathbf{S_y}$ searah sumbu Y, maka titik hasil penskalaan titik A tersebut dapat diperlihatkan pada gambar 4-2 berikut :

maka koordinat hasil penskalaan dapat ditentukan berikut :

$x' = S_x(x-a) + a$
$y' = S_y(y-b) + b$



Gambar 4-2

atau

$x' = S_x x + a - S_x a$
$y' = S_y y + b - S_y b$

atau dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a - S_x a \\ b - S_y b \end{bmatrix}$$

Jika pusat penskalaannya adalah sumbu koordinat P(0,0), maka a = 0 dan b = 0, sehingga persamaannya menjadi :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matrik penyajian untuk penskalaan terhadap titik pusat P(0,0) adalah

$$T = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix} .$$

Contoh 4.2

Tentukan posisi dari segitiga ABC yang dibentuk oleh titik-titik A(20,20), B(100,20) dan C(60,120), jika dilakukan penskalaan dengan faktor skala $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ terhadap titik pusat P(0,0)

Jawab:

$$\begin{bmatrix} x_a' & x_b' & x_c' \\ y_a' & y_b' & y_c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 20 & 100 & 60 \\ 20 & 20 & 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 400 & 240 \\ 40 & 40 & 240 \end{bmatrix}$$

Yaitu A'(80,40), B'(400,40) dan C'(240,240)

Contoh perhitungan :
4x20 + 0x20
0x20 + 2x20

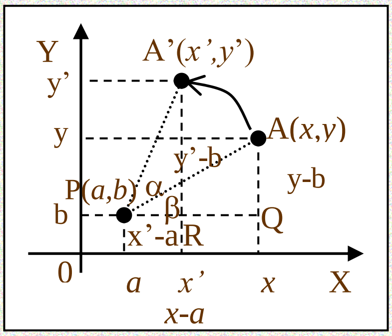
4.3 Rotasi (Perputaran)

Seperti halnya pergeseran dan penskalaan, untuk pemutaran sembarang obyek dilakukan dengan pemutaran setiap titik ujung garis. Pemutaran searah jarum jam akan dinyatakan dengan sudut negatif, sedangkan pemutaran berlawanan dengan jarum jam dinyatakan dengan sudut postif. Dengan menganggap besarnya sudut putar adalah α, maka hasil pemutaran titik A(x,y) dengan pusat putar P(a,b) akan dihasilkan titik A'(x',y') seperti yang diperlihatkan pada gambar 4-3 berikut :

Pandang segitiga siku-siku PAQ :

$$\sin\beta = \frac{y-b}{r} \Rightarrow r\sin\beta = y-b$$

$$\cos\beta = \frac{x-b}{r} \Rightarrow r\cos\beta = x-a$$



Gambar 4-3

Pandang segitiga siku-siku PA'R, maka :

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{y'-b}{r} \Rightarrow r\sin(\alpha+\beta) = y'-b$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{x'-a}{r} \Rightarrow r\cos(\alpha+\beta) = x'-a$$

$$r\sin(\alpha+\beta) = r\sin\alpha.\cos\beta + r\cos\alpha.\sin\beta = y'-b$$

$$(\mathrm{x}-a).\sin\alpha + (\mathrm{y}-\mathrm{b}).\cos\alpha = y'-b$$

$$y' = \mathrm{x}\sin\alpha + y\cos\alpha + b - \mathrm{a}.\cos\alpha - b.\sin\alpha$$

$$r\cos(\alpha+\beta) = r\cos\alpha.\cos\beta - r\sin\alpha.\sin\beta = x'-a$$

$$(\mathrm{x}-a).\cos\alpha - (\mathrm{y}-\mathrm{b}).\sin\alpha = x'-a$$

$$x' = \mathrm{x}.\cos\alpha - y\sin\alpha + a - \mathrm{a}.\cos\alpha + b.\sin\alpha$$

Persamaan *x*' dan *y*' tersebut dapat disusun dalam bentuk matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a - a.\cos\alpha + b.\sin\alpha \\ b - b.\cos\alpha - a.\sin\alpha \end{bmatrix}$$

Bila pusat rotasinya berada pada sumbu koordinat P(0,0), maka persamaan tersebut menjadi :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matrik penyajian untuk rotasi terhadap titik pusat P(0,0) adalah

$$T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Contoh 4.3

Tentukan posisi dari segitiga ABC yang dibentuk oleh titik-titik A(20,20), B(100,20) dan C(60,120), jika dilakukan pemutaran dengan pusat sumbu koordinat dengan rotasi putarnya 180 derajat berlawanan arah dengan arah jarum jam.

Jawab :

$$\begin{bmatrix} x_a' & x_b' & x_c' \\ y_a' & y_b' & y_c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 20 & 100 & 60 \\ 20 & 20 & 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & -100 & -60 \\ -20 & -20 & -120 \end{bmatrix}$$

Yaitu A'(-20, -20), B'(-100, -20) dan C'(-60,-120)

4.4 Refleksi (Pencerminan)

Refleksi terhadap sebuah garis ***g*** adalah transformasi yang memetakan masing – masing titik pada bidang ke dalam bayangan cerminnya terhadap ***g***. Matrik Penyajian untuk:

1. refleksi terhadap sumbu *y* (yang mengubah $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ menjadi $\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$) adalah : $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. refleksi terhadap sumbu *x* (yang mengubah $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ menjadi $\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$) adalah : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
3. refleksi terhadap garis $y = x$ (yang mengubah $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ menjadi $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$) adalah : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Contoh 4.4

Tentukan posisi dari segitiga ABC yang dibentuk oleh titik-titik A(10,2), B(10,8) dan C(3,2) jika dilakukan pencerminan terhadap sumbu *x,* sumbu *y* , dan garis *y* = *x*.

Jawab :

Pencerminan terhadap sumbu *y*.

$$\begin{bmatrix} x_a' & x_{b'} & x_c' \\ y_a' & y_b & y_c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 10 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -10 & -3 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Yaitu A'(-10, 2), B'(-10, 8) dan C'(-3, 2)

Pencerminan terhadap sumbu *x*.

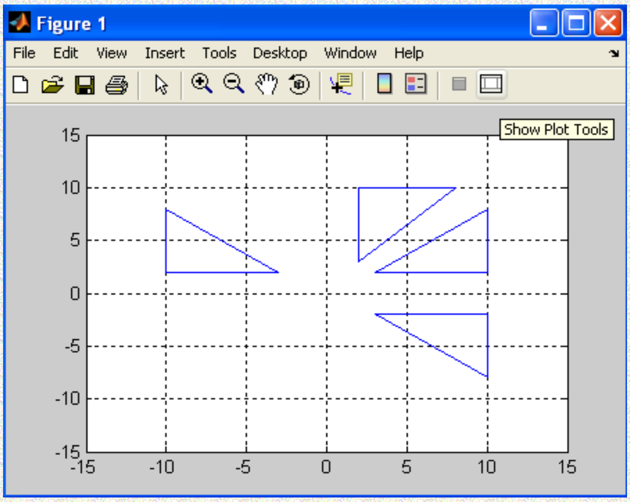
$$\begin{bmatrix} x_a' & x_{b'} & x_c' \\ y_a' & y_b & y_c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 10 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 3 \\ -2 & -8 & -2 \end{bmatrix}$$

Yaitu A'(10, -2), B'(10, -8) dan C'(3, -2)

Pencerminan terhadap garis *y* = *x*.

$$\begin{bmatrix} x_a' & x_{b'} & x_c' \\ y_a' & y_b & y_c' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 10 & 3 \\ 2 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}$$

Yaitu A'(2, 10), B'(8, 10) dan C'(2, 3)



Contoh 4.5

Carilah persamaan bayangan sebuah garis $y = 2x + 1$ yang dipetakan oleh matrik A = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Dan

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Sehingga

$x = x' - y'$

$y = -2x' + 3y'$

Substitusikan ke $y = 2x + 1$ maka dihasilkan :

$-2x' + 3y' = 2(x' - y') + 1$

$-2x' + 3y' = 2x' - 2y' + 1$

$5y' = 4x' + 1$

$$y' = \frac{4}{5}x' + \frac{1}{5}$$

4.5 *Shearing*

Shearing adalah suatu proses untuk menstransformasikan obyek dengan cara 'membebani' obyek tersebut pada arah tertentu. Contoh sederhana proses shearing adalah pembentukan huruf *italic* (miring) dari sembarang huruf. Proses *shearing* suatu titik A(x,y) menjadi titik A'(x',y') ke arah sumbu X sebesar $\mathbf{Sh_x}$ dan sumbu Y sebesar $\mathbf{Sh_y}$ dinyatakan dalam persamaan sebagai :

$x' = x + Sh_x\, y$
$y' = Sh_y\, x + y$

yang dapat ditulis dalam bentuk matriks :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & Sh_x \\ Sh_y & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Matrik penyajian untuk *shearing* terhadap titik pusat P(0,0) adalah

$$T = \begin{bmatrix} 1 & Sh_x \\ Sh_y & 1 \end{bmatrix}.$$

Contoh 4.6

Tentukan posisi dari segitiga ABC yang dibentuk oleh titik-titik A(20,20), B(100,20) dan C(60,120), jika dilakukan *shearing* dengan bobot kearah sumbu x adalah $Sh_x = 2$ dan bobot kearah sumbu y adalah $Sh_y = 3$ yang pusatnya terletak di pusat koordinat.